Ecole de l'Air Epreuve à option M - P
- 1992 -

Le but du problème est le calcul de la constante d'Euler et son application dans l'étude de certaines intégrales généralisées.

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

PREMIERE PARTIE.

Calcul approché de la constante d'Euler.

1) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$u_n = S_n - L(n)$$
$$v_n = S_{n-1} - L(n)$$

$L(n)$ représente le logarithme népérien de n. $\sim$: " est équivalent à ".

On définit la constante γ comme le nombre réel $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

a) En utilisant les deux suites de terme général u_n et v_n, démontrer l'existence de γ.

b) Donner un encadrement de γ d'amplitude 10^{-1}.

2) Soit $K \in \mathbb{N}^*$ et $f : [K, K+1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(t) = \frac{1}{t}$

On note g la fonction affine sur $[K, K+1]$ et h la fonction affine sur $[K, K+\frac{1}{2}[$ et $[K+\frac{1}{2}, K+1]$ telles que :

$$f(K) = g(K) = h(K) \qquad f(K+1) = g(K+1) = h(K+1)$$

$$f'(K) = h'(K) \qquad f'(K+1) = h'(K+1)$$

a) En utilisant les représentations graphiques (ou autrement) démontrer que :

$$\frac{1}{2K} + \frac{1}{2(K+1)} + \frac{1}{8(K+1)^2} - \frac{1}{8K^2} \leq L\left(\frac{K+1}{K}\right) \leq \frac{1}{2K} + \frac{1}{2(K+1)}$$

Quelles inégalités peut-on en déduire pour $u_n - \gamma$?

On pourra utiliser la relation suivante, que l'on justifiera :

$$u_n - \gamma = \sum_{K=n}^{+\infty} \left(L\left(\frac{K+1}{K}\right) - \frac{1}{K+1} \right)$$

b) Donner alors un encadrement de γ d'amplitude 10^{-3}.

c) Prouver l'existence de réels a, b, c tels que :

$$L\left(\frac{K+1}{K}\right) - \frac{1}{K+1} - a.\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K+1}\right) - b.\left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{(K+1)^2}\right) \sim c.\left(\frac{1}{K^4} - \frac{1}{(K+1)^4}\right) \text{ à l'infini.}$$

d) En déduire que $u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \sim \frac{c}{n^4}$ à l'infini.

3) On désire améliorer le calcul de la constante γ.

a) Q[X] est l'ensemble des polynomes à coefficients rationnels.

Soit Φ l'endomorphisme de Q[X] tel que :

$\Phi : Q(X) \longmapsto Q(X+1) - Q(X)$

Chercher Im Φ et Ker Φ.

b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $Q_p \in Q[X]$ tel que :

$$\begin{cases} Q_p(X+1) - Q_p(X) = X^p \\ Q_p(0) = 0 \end{cases}$$

c) Démontrer que pour $p \geq 1$

$Q'_p(X) - Q'_p(0) = p\, Q_{p-1}(X)$.

d) En déduire le calcul de $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$.

e) Déterminer $M_5 = \mathrm{Max}\{Q_5(t),\ t \in [0,1]\}$
$m_5 = \mathrm{Min}\{Q_5(t),\ t \in [0,1]\}$

4) Pour K et $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_p(K) = \int_0^1 \frac{p\, Q_{p-1}(t)}{(t+K)^{p+1}}\, dt$$

a) Trouver une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}.

b) Calculer $I_1(K)$ et obtenir l'encadrement suivant :

$$-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{K^6} - \frac{1}{(K+1)^6}\right) \leq I_6(K) \leq 0.$$

c) En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$.

d) Donner alors les dix premières décimales de γ.

DEUXIEME PARTIE.

On utilise la constante γ pour calculer certaines intégrales généralisées.

A. 1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\, dt$$

puis à l'aide d'un changement de variables montrer que

$$\int_0^n \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

2) Démontrer que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - L(n) = \int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n\right] \frac{dy}{y} - \int_1^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \frac{dy}{y}$$

3) On veut démontrer que pour $0 \leq y \leq n$, on a

$$0 \leq e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \leq e^{-y} \frac{y^2}{n}$$

Pour cela on établira successivement que :

a) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad 1+x \leq e^x$.

b) $\forall t \in [0,n] \qquad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t$ et $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

c) $\forall t \in [0,n] \qquad \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{t^2}{n}$

d) $\forall y \in [0,n] \qquad 0 \leq e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \leq e^{-y} \frac{y^2}{n}$

4) Démontrer alors que

$$\gamma = \int_0^1 (1 - e^{-y}) \frac{dy}{y} - \int_1^{+\infty} e^{-y} \frac{dy}{y}$$

B. 1) Prouver l'existence de

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) dx$$

2) Prouver l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \, dx \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

On pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \, dx$

On écrit alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \, dx = \lim_{\alpha \to 0} I_n(\alpha)$

3) Démontrer que

$$I_n(\alpha) = \int_\alpha^{n\alpha} \frac{e^{-x}}{x} \, dx$$

4) On introduit la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1 - e^{-x}}{x}$$

Vérifier que $\quad I_n(\alpha) = L(n) - \displaystyle\int_\alpha^{n\alpha} f(x) dx$

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \, dx = L(n)$

5) En utilisant pour $\lambda > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda}$$

démontrer que

$$\sum_{q=1}^{n-1} \frac{1}{q} - L(n) = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \, g(x) \, dx$$

avec $g(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}} - \dfrac{1}{x}$

6) En déduire que $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) \, dx$.